# Μάθημα 5ο  09/04/2020

[Ανάλυση της πρότασης 13.1 παρόλο που είναι εκτός, για καλύτερη κατανόηση της n-οστής ρίζας ]

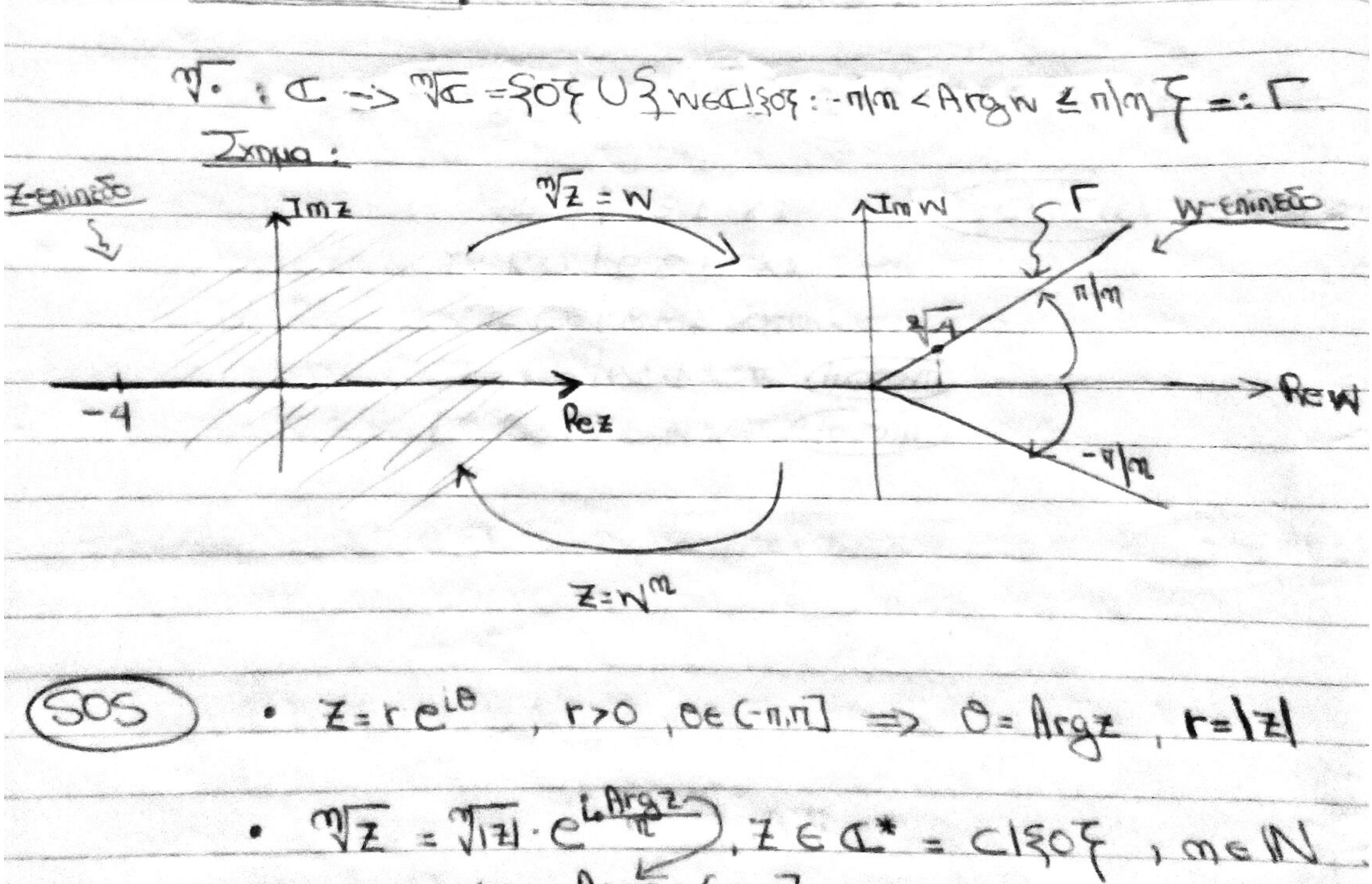
Η συνάρτηση της n-οστής ρίζας $\sqrt[n]{z}$ ορίζεται:

- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}}$ για $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$
- Για $z=0$ : $\sqrt[n]{0} = 0$ , $n \in \mathbb{N}$ ]

→ Πρόταση 13.1:

$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \sqrt[n]{\mathbb{C}} = \{0\} \cup \{w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : -\pi/n < \operatorname{Arg} w \le \pi/n\} =: \Gamma$.

Σχήμα:




SOS

- $z = re^{i\theta}$ , $r>0$ , $\theta \in (-\pi, \pi] \Rightarrow \theta = \operatorname{Arg} z$ , $r = |z|$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\operatorname{Arg} z}{n}}$ , $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , $n \in \mathbb{N}$
  και $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$
- $\sqrt[n]{0} = 0$ , $n \in \mathbb{N}$
- $|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$
- $\operatorname{Arg}(\sqrt[n]{z}) = \frac{\operatorname{Arg} z}{n}$

→ Οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = w$ δίνονται από:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad , k = 0, \ldots, n-1, \text{ όπου}$$

$z \in \mathbb{C}$ και $w \in \mathbb{C}^*$. Άρα η εξίσωση έχει "n" διαφορετικές λύσεις.

▶ Επιλυση της $e^z = w$ ($w, z$ είναι μιγαδικοί με $w$: άγνωστο)

• Για να έχει λύση η εξίσωση πρέπει $w \neq 0$.

γιατί: $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}|$
$= |e^x| \cdot |e^{iy}|$
$= |e^x| \cdot 1$
$= |e^x| = e^x > 0 \Rightarrow w \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{e^z \neq 0}$ : πάντα !!!

→ Σχόλιο: ① $e^z = 0$ : δεν έχει λύσεις !!!

② Στην εξίσωση $e^z = w$ χρησιμοποιούμε την πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού για το $w$ και την αλγεβρική μορφή του $z$. Δηλαδή:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ w = |w| e^{i\,Arg w} \end{cases}$$ Άρα:

$$e^z = w \Leftrightarrow e^x e^{iy} = |w| e^{i\,Arg w} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = |w| \\ e^{iy} = e^{i\,Arg w} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{i(y + 2k\pi)} = e^{i\,Arg w}$$

$$\Leftrightarrow y = Arg w + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Άρα $\begin{cases} e^x = |w| \iff x = \ell n|w| , & (\ell n \ (0,+\infty) \to \mathbb{R} ,\ |w| \in \mathbb{R}) \\ y = \underbrace{Arg\,w}_{\text{μοναδικό}} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$y$: πολλαπλό πλήθος

Επομένως οι ΡΙΖΕΣ της $e^z = w$ είναι:

$$z_k = \ell n|w| + i\,(Arg\,w + 2k\pi) , \quad k \in \mathbb{Z}$$

!!! ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>Ορισμός</u> (ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ)

$$\mathrm{Log}: z \mapsto \mathrm{Log}\,z = \ell n|z| + i\,Arg\,z , \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

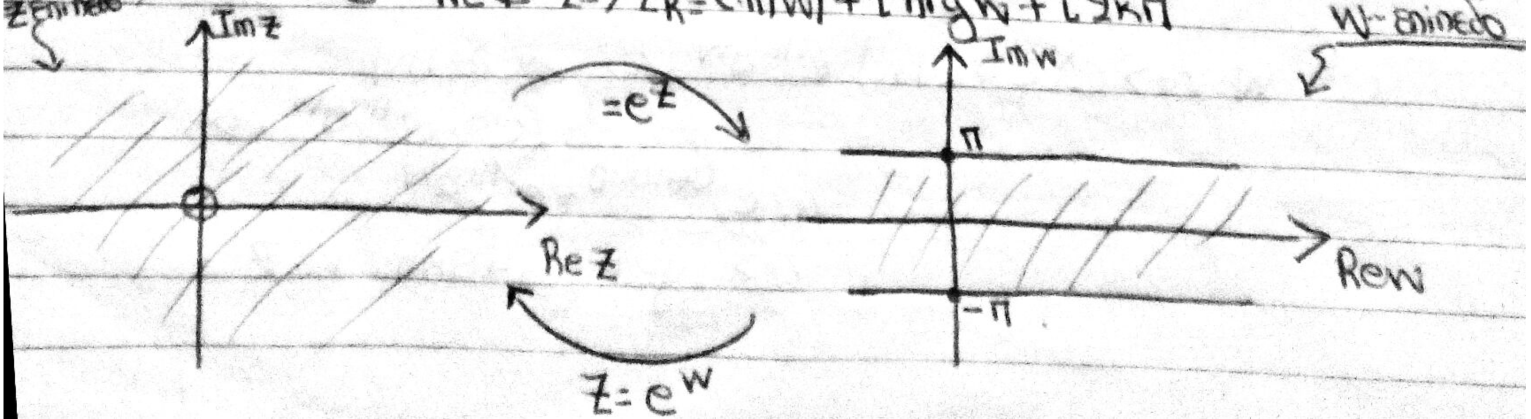
- Η λογαριθμική συνάρτηση στο $\mathbb{Z}$ είναι επέκταση στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ του φυσικού λογαρίθμου που ορίζεται στο $(0,+\infty) \subset \mathbb{R}$
- Αν $z = x \in \mathbb{R}$ τότε $\mathrm{Log}\,z = \ell n z + i \cdot 0 = \ell n z$

<u>Πρόταση 1.32</u> (εκτός ύλης αλλά την κάναμε για να καταλάβουμε καλύτερα την λογαριθμική συνάρτηση)

$$\mathrm{Log}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathrm{Log}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = \{ w \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}\,w \leq \pi \} = \Lambda$$

<u>Σχήμα</u>:

$$e^z = w \in \mathbb{C}^* \iff z_k = \overbrace{\ell n|w| + i\,Arg\,w}^{=\mathrm{Log}\,w} + i2k\pi$$



• Διάβασμα αν θέλουμε την Απόδειξη της Πρότασης 1.3.2

Π.Χ. 1.3.7 (από τις σημειώσεις του στην ιστοσελίδα του)

Ποια είναι όλα τα $z$ έτσι ώστε $e^z = i$ ?

Λύση

Η εξίσωση είναι της μορφής $e^z = w$ όπου $w = i$ στη συγκεκριμένη άσκηση.

Άρα: $z_k = \log|w| + i(\mathrm{Arg}\, w + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ (1)

$w = i \Rightarrow |w| = 1$

Το $w = i$ σε πολική μορφή γράφεται: $\boxed{i = e^{i\pi/2}}$

Τότε η (1) θα είναι:

$$z_k = \log 1 + i(\mathrm{Arg}\, i + 2k\pi)$$

$$z_k = \cancel{\log 1}^{\,0} + i(\pi/2 + 2k\pi)$$

Άρα, οι λύσεις: $z_k = i \cdot \pi/2 + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

• $\log i = \ln|i| + i\,\mathrm{Arg}\, i$

$\log i = \ln 1 + i \cdot \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \log i = i\frac{\pi}{2}$

## ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $z^\lambda$ ($z\in\mathbb{C}^*$ : μιγαδικό με εκθέτη μιγαδικό)

**Ορισμός:**

Η συνάρτηση:

$$\cdot^{\lambda} : z \longmapsto z^{\lambda} = e^{\lambda \cdot \log z} \quad , z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

$\lambda\in\mathbb{C}$ αλλά σταθερός

**Σχόλιο**

- Το $\lambda$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μιγαδικός
- Το $z$ πρέπει να είναι διάφορο του 0 ή $z\neq 0$

**π.χ**

Υπολογίστε το $i^i$

**Λύση**

$$i^i = e^{i\log i} = e^{i(\ln|i| + i\,\mathrm{Arg}\,i)}$$

$$= e^{i(\ln|1| + i\,\pi/2)}$$

$$= e^{i(0 + i\cdot\pi/2)}$$

$$= e^{i\cdot(i\cdot\pi/2)}$$

$$= e^{-\pi/2}$$

$$\Rightarrow i^i = e^{-\pi/2}$$

Άσκηση Η.W. Ελέγξτε ότι η $z^\lambda$ ($\lambda\in\mathbb{C}$) ταυτίζεται με τη $z^n$ $\forall n\in\mathbb{Z}$, και $z\in\mathbb{C}$

Πρόταση 1.3.3 (χωρίς την απόδειξη)

(α) $z^{-\lambda} = \dfrac{1}{z^{\lambda}}$

(β) $z^{\lambda} z^{\mu} = z^{\lambda+\mu}$

(γ) $(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu}$, αν $\lambda \log z \in \Lambda$

(δ) $(zw)^{\lambda} = z^{\lambda} w^{\lambda}$, αν $z w \in \Lambda$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

→ Στη συνέχεια δεν θα έχουμε πολύ $z^{\lambda}$

Άσκηση Α.18

Να βρεθούν οι ρίζες της $\sqrt{i}$.

Λύση

$$\sqrt{i} = \underbrace{\sqrt{|i|}}_{=1} \cdot \underbrace{e^{i\frac{\operatorname{Arg} i}{2}}}_{\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}}$$

$$\sqrt{i} = e^{i\cdot \pi/4}$$

$z^2 = i$ ή $z = \sqrt{i}$

Οι ρίζες της εξίσωσης δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[m]{|z|}\, e^{i\cdot\frac{\theta+2k\pi}{m}}, \quad k=0, \ldots, m-1$$

Άρα: $z_k = \sqrt[m]{1} \cdot e^{i\frac{\pi/2+2k\pi}{2}}$, $k=0,1$

$\Rightarrow z_1 = e^{i\pi/4}$ και $z_2 = e^{i5\pi/4}$

## Άσκηση A.23

Βρείτε για δοσμένο $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ τις λύσεις $(-1)^z = w$

**Λύση**

Η εξίσωση $(-1)^z = w$

- $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$
- $(-1)^z = z^\lambda \;, \; z \neq 0$
- $(-1)^z = e^{z\log(-1)}$

$$= e^{z(\ln|-1| + i\cdot Arg(-1))}$$

$$= e^{z(\cancel{\ln 1}^{0} + i\cdot\pi)}$$

$$\boxed{(-1)^z = e^{z\pi}}$$

Επομένως έχω να λύσω την εξίσωση $e^{z\pi} = w$

$(z\pi)_k = \log w + i2k\pi$

$(z\pi)_k = \ln|w| + i\cdot Arg w + i\,2k\pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$z_k = \frac{\log w}{k}$$

H.W

Ασκηση: A.19, A.20, A.22

# « Κεφάλαιο 2º »

## «ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ»

→ Από το κεφάλαιο 1º, πρέπει:

- Ευχέρεια στους υπολογισμούς, γνώση (working-knowledge) όλων των ορισμών και κανόνων υπολογισμού στο κεφάλαιο 1.

- Ποιο είναι το σώμα των μιγαδικών $\mathbb{C}$, τι πράξεις μπορώ να κάνω.

- Μάθαμε τις συναρτήσεις

$$z^n,\ e^z,\ \sqrt[n]{z},\ z^a,\ \log z$$

- $\sin z, \cos z$ → αργότερα.

$\boxed{\text{ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ του } \mathbb{C} \text{ είναι η ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ του } \mathbb{R}^2}$

- Στην παράγραφο 2.1 λέει ότι κάναμε στο κεφάλαιο 1, στο $\mathbb{C}$

- $d(z,w) = |z-w|$ : Ευκλείδεια απόσταση των $z, w$

- Ό,τι λέγαμε στο $\mathbb{R}^2$ ισχύει και στο $\mathbb{C}$

- Πάντα θα μιλάμε για δίσκους $D(z,r)$ είτε ανοιχτούς είτε κλειστούς

- Όλη η παράγραφος 2.1 έχει επανάληψη από μιγαδικούς και τοπολογικές ιδιότητες